Lösningsskiss till tentan i Matematisk analys, del 1, 2020-01-09.

1a $z = (-1+i)^{12} \Rightarrow |z| = |-1+i|^{12} = \left(\sqrt{(-1)^2+1^2}\right)^{12} = 2^6$

$\arg z = 12 \arg(-1+i) + 2\pi n = 12 \cdot \frac{3}{4}\pi + 2\pi n = \pi + 2\pi m$, där $m \in \mathbb{Z}$ $\quad$ i, $\frac{3}{4}\pi$, -1

Svar: $|z| = 64$, $\arg z = \pi + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

1b $3z - i\bar{z} = 5 - 7i \quad (1)$

Sätt $z = x + iy$. $(1) \Leftrightarrow 3(x+iy) - i(x-iy) = 5-7i$

$\Leftrightarrow (3x-y) + i(3y-x) = 5-7i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=5 \\ 3y-x=-7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = 3x-5 \\ 3(3x-5)-x=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow z = 1-2i$

Svar: $z = x - 2i$

2 $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-1}$ $\quad$ • $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-x+4}{x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-x+4}{x-1} = \infty \Rightarrow x=1$ är lodrät asymptot.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \infty$

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-x+4}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 1$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\dfrac{x^2-x+4}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+4-\cancel{x^2}+\cancel{x}}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x-1} = 0 \Rightarrow y = x$ – sned asymptot då $x \to \pm\infty$

• $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+4)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$

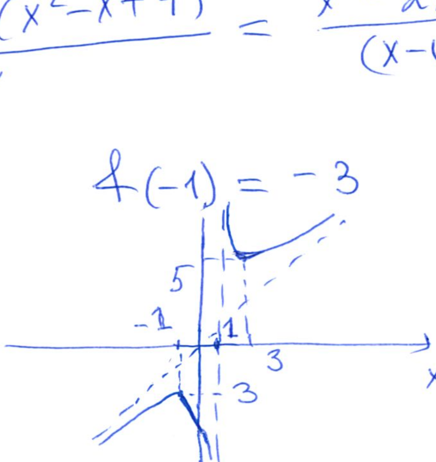
$+ \nearrow \quad -1 \quad - \searrow \quad 1 \quad - \searrow \quad 3 \quad + \nearrow$

-1: l. max $\quad$ 1: terrassp $\quad$ 3: l. min

$(-1, -3)$ lok. maximipunkt

$(3, 5)$ lok. minimipunkt

$f(-1) = -3$ $\quad$ $f(3) = 5$



$y = x$ – sned asymptot

$x = 1$ – lodrät asymptot

3

$f(x) = \ln(x-1) - 3\ln(5-x) - 2x + 4$

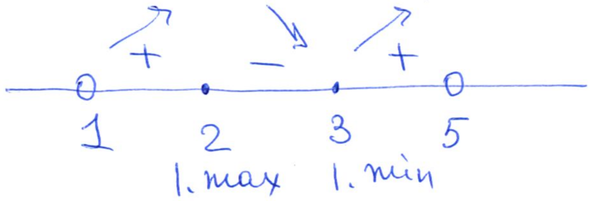
- $D_f : \begin{cases} x-1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 5, \quad D_f =]1, 5[$

- $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\ln(x-1) - 3\ln(5-x) - 2x+4\right) = -\infty$

  $\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \left(\ln(x-1) - 3\ln(5-x) - 2x+4\right) = \infty$

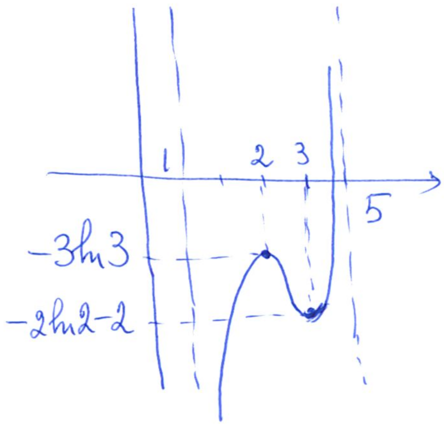
  $\Rightarrow \quad x = 1, \quad x = 5$ – lodräta asymptoter

- $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{5-x} - 2 = \dfrac{2x^2 - 10x + 12}{(x-1)(5-x)} = \dfrac{2(x-2)(x-3)}{(x-1)(5-x)}$



$f(2) = \ln 1 - 3\ln 3 - 4 + 4 = -3\ln 3$

$f(3) = \ln 2 - 3\ln 2 - 6 + 4 = -2\ln 2 - 2$



f är kontinuerlig på $]1,5[$

f är växande för $x \in]1,2[$

avtagande för $x \in]2,3[$

växande för $x \in]3,5[$

Dessutom $f(x) \to -\infty$ då $x \to 1^+$

$f(x) \to \infty$ då $x \to 5^-$

och $f_{max} = f(2) = -3\ln 3 < 0$,

$f_{min} = f(3) = -2\ln 2 - 2 < 0$

$\Rightarrow$ Svar: Antalet reella nollställen till f är 1.

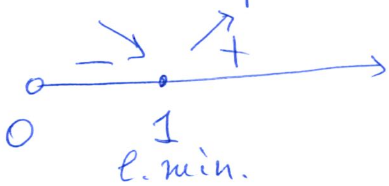
4

$V = \pi r^2 h = 2\pi \Rightarrow r^2 h = 2 \Rightarrow h = \dfrac{2}{r^2}$

$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \longrightarrow \min$

$A(r) = \dfrac{4\pi}{r} + 2\pi r^2, \quad r > 0 \qquad A'(r) = -\dfrac{4\pi}{r^2} + 4\pi r =$

$= 4\pi \dfrac{r^3 - 1}{r^2} = 0 \iff r = 1$



$A_{min} = A(1) = 6\pi$ (a.e.)

Svar: $A_{min} = 6\pi$ a.e.

5a

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{x\,\cancel{(x-2)}}=-\frac{1}{2}$$

5b

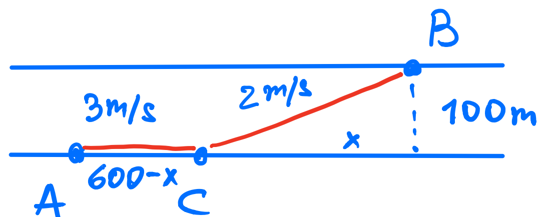
$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=e^3.$$

5c

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-3e^{-x}}{x+5e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{3e^{-x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{5e^{-x}}{x}\right)}=1$$

Svar: a) $-\frac{1}{2}$, b) e^3, c) 1.

6

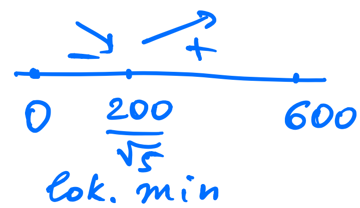


$$T(x)=\frac{600-x}{3}+\frac{\sqrt{100^2+x^2}}{2}\to \min$$

$$0<x<600$$

$$T'=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{100^2+x^2}}=0 \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{100^2+x^2}+3x}{6\sqrt{100^2+x^2}}=0 \Leftrightarrow 3x=2\sqrt{100^2+x^2}$$

$$\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\begin{cases}9x^2=4(100^2+x^2)\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2=4\cdot 100^2\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2\cdot 100}{\sqrt{5}}$$



$$T_{min}=T\left(\frac{200}{\sqrt{5}}\right).$$

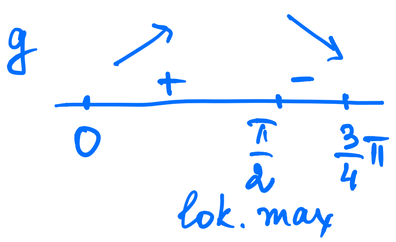
Svar: Helena ska gå $600-\frac{200}{\sqrt{5}}$ m längs AC, sedan $\frac{300}{\sqrt{5}}$ m går hon i parken.

7

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad 0<x<\frac{3\pi}{4}.\qquad f'(x)=\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}$$

Sätt $g(x)=x\sin x+\cos x$, $0<x<\frac{3\pi}{4}$. Vi vill visa att $g(x)>0$.

$$g'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x=0 \quad \text{om} \quad x=\frac{\pi}{2}$$



$$g_{max}=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\qquad g(0)=1,$$

$$g\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{4}\pi-1\right)>0$$

Då ser vi att $g(x)>0$ för $0<x<\frac{3}{4}\pi$

Ur den följer att $f'(x)<0$ för $0<x<\frac{3}{4}\pi \Rightarrow f$ är strängt avtagande $\Rightarrow f$ är omvändbar. Notera att $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ och $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\pi/2}=-\frac{2}{\pi}\neq 0 \Rightarrow$ Enligt satsen om derivata för f^{-1} får vi $(f^{-1})'(0)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\pi}{2}$.

Svar: $(f^{-1})'(0)=-\frac{\pi}{2}$